# SITE PARA CÁLCULO DE VIGA SOB BASE ELÁSTICA

ISABELA C. D. PARRA[1], ALEX J. F. LOPES[2], LUCIANO J. S. JUNIOR[3], GUSTAVO C. NIRSCHL[4]

[1] Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga ,isabelacassia19@gmail.com
[2] Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, alex.junior_13@hotmail.com
[3] Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, lucianojunior67@hotmail.com
[4] Professor MSc. da área de Edificações, IFSP, Câmpus Votuporanga, nirschl@gmail.com
Área de conhecimento (Tabela CNPq): Mecânica das Estruturas - 3.01.02.04-9

Apresentado no
8° Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
06 a 09 de novembro de 2017 - Cubatão-SP, Brasil

**RESUMO:** A maioria dos programas computacionais de cálculo da área de Engenharia Civil não apresenta todos os passos de resolução. Com o objetivo de ajudar alunos, professores e profissionais da área, existe um grupo de pesquisa CNPq que desenvolve programas que detalham os cálculos e a teoria envolvida. Neste artigo será apresentado um novo módulo de um programa existente, para a análise estrutural de viga sob base elástica. O programa já está disponível *on-line* e o novo módulo será incorporado a ele. Como principal objetivo de todos os programas do grupo de pesquisa, é possível a geração do relatório em PDF detalhado.

**PALAVRAS-CHAVE**: Análise Estrutural; Viga sob base elástica.

## SITE OF CALCULATION OF BEAM ON ELASTIC BASE

**ABSTRACT:** Most computational software in the area of Civil Engineering does not present all the resolution steps. In order to help students, professors and professionals, there is a CNPq research group that develops software that details the calculations and the theory involved. In this paper, a new module of existing software will be presented for structural analysis of elastic base beams. The software is now available online and the new module will be incorporated into it. As the main objective of all the software in the research group, it is possible to generate the detailed PDF report.

**KEYWORDS**: Structural analysis; Beam on elastic base.

## INTRODUÇÃO

Existem programas de computador da área de Engenharia Civil, como o FTOOL (2017), que realizam os cálculos e não mostram todos os passos de cálculo. Porém, muitas vezes é importante para o projetista conhecer todo o funcionamento interno do programa para verificar se está de acordo com o esperado. Com o intuito de contribuir neste assunto, foi criado um grupo de pesquisa cadastrado no CNPq que desenvolve programas de Engenharia, sendo que, ao final, é possível gerar um relatório PDF com os dados calculados e uma breve explicação do método utilizado. Esses programas visam a atender principalmente os alunos, os professores, e os profissionais da área. Neste artigo será apresentado um módulo para o cálculo de viga sob Base Elástica, incorporado a um programa já disponível on-line que contem outros de módulos de cálculo.

## MATERIAL E MÉTODOS

As vigas sob base elástica têm como exemplos as vigas baldrame suportadas diretamente pelo solo e os trilhos de estradas de ferro, suportados por dormentes.

Para a análise estrutural das vigas sob base elástica, é necessário conhecer um parâmetro β, que depende da rigidez do solo (K) e da rigidez do material da viga (E*I, sendo E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia). Este parâmetro é dado pela equação 1 a seguir.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 * E * I}} \tag{1}$$

Segundo Sussekind (1977), devem-se desprezar os efeitos da base elástica (considerando-a como uma base infinitamente rígida) quando β*L <π/4, sendo L é o comprimento da viga. Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita. Depois de classificada a viga, há formulações diferentes para a análise estrutural (momento fletor, esforço cortante e deslocamento) de acordo com Sussekind (1977), que foram programadas como resultado deste trabalho.

A disponibilização on-line do programa se deve ao fato de uma maior facilidade de acesso aos usuários. A linguagem escolhida foi a HTML/Javascript devido ao fato de ser amplamente utilizada e conhecida por todos os outros membros do grupo. O relatório PDF é criado com o auxílio da biblioteca PDFMAKE (2017).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como citado, a análise estrutural de viga sob base elástica é, na verdade um módulo de um programa já disponível *on-line*. Na Figura 1, encontra-se um exemplo de viga sob base elástica desenhada no programa. Na Figura 2, aparece um dos diagramas apresentado como resultado e na Figura 3 mostra-se parte do relatório gerado em PDF.

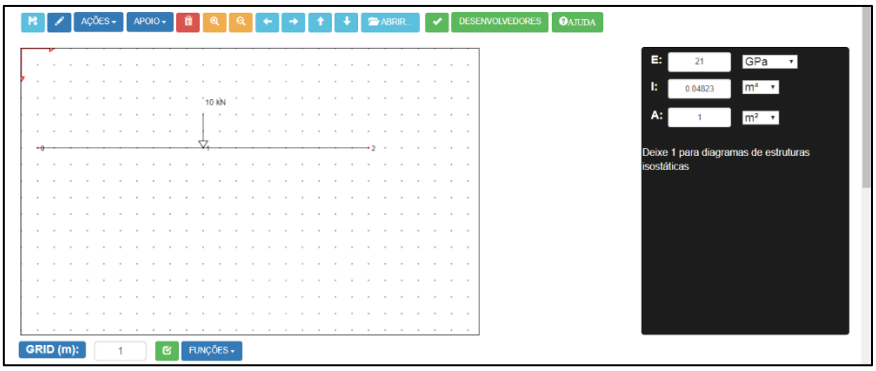



Figura 1: Exemplo de uma viga sob base elástica desenhada no programa.

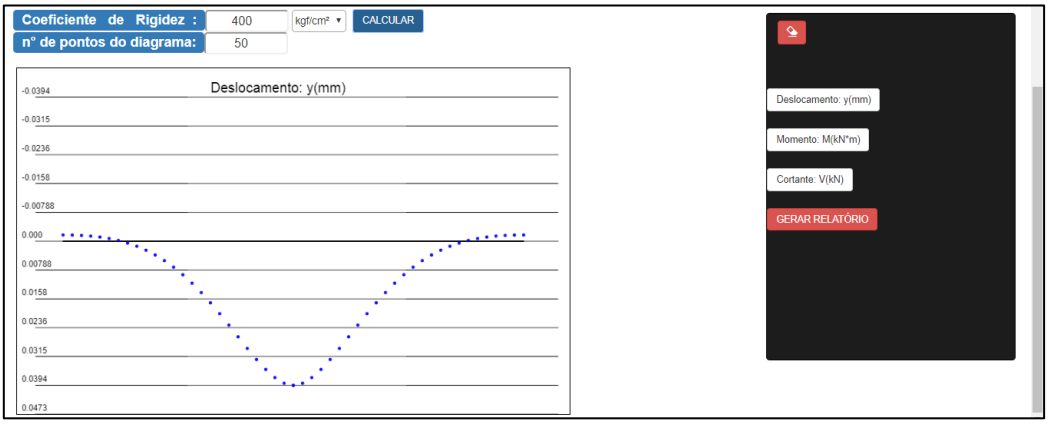
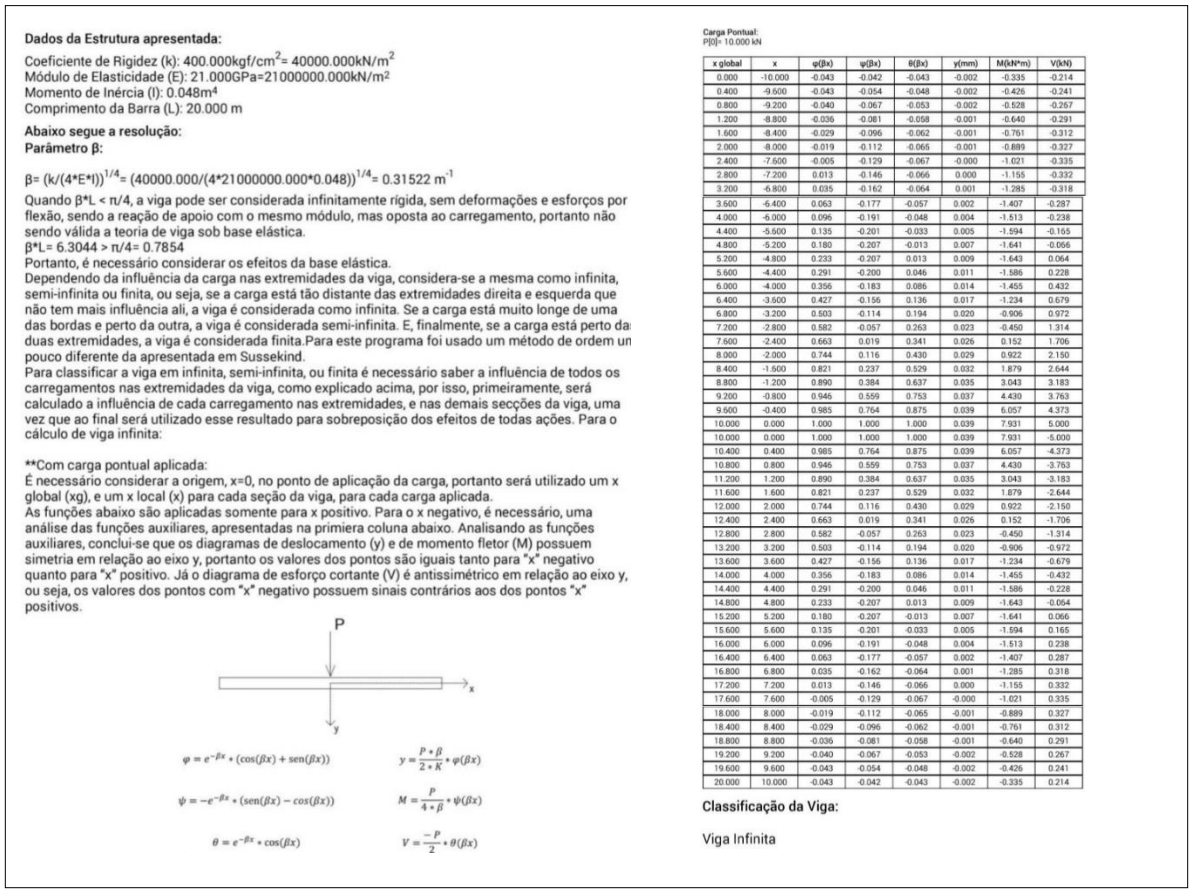



Figura 2: Resultado do diagrama de cortante da viga apresentada na Figura 1.



**Dados da Estrutura apresentada:**

Coeficiente de Rigidez (k): 400.000kgf/cm$^2$= 40000.000kN/m$^2$
Módulo de Elasticidade (E): 21.000GPa=21000000.000kN/m$^2$
Momento de Inércia (I): 0.048m$^4$
Comprimento da Barra (L): 20.000 m

**Abaixo segue a resolução:**
**Parâmetro β:**

$\beta = (k/(4*E*I))^{1/4} = (40000.000/(4*21000000.000*0.048))^{1/4} = 0.31522\ m^{-1}$

Quando β*L < π/4, a viga pode ser considerada infinitamente rígida, sem deformações e esforços por flexão, sendo a reação de apoio com o mesmo módulo, mas oposta ao carregamento, portanto não sendo válida a teoria de viga sob base elástica.
β*L= 6.3044 > π/4= 0.7854
Portanto, é necessário considerar os efeitos da base elástica.
Dependendo da influência da carga nas extremidades da viga, considera-se a mesma como infinita, semi-infinita ou finita, ou seja, se a carga está tão distante das extremidades direita e esquerda que não tem mais influência ali, a viga é considerada como infinita. Se a carga está muito longe de uma das bordas e perto da outra, a viga é considerada semi-infinita. E, finalmente, se a carga está perto da duas extremidades, a viga é considerada finita.Para este programa foi usado um método de ordem un pouco diferente da apresentada em Sussekind.
Para classificar a viga em infinita, semi-infinita, ou finita é necessário saber a influência de todos os carregamentos nas extremidades da viga, como explicado acima, por isso, primeiramente, será calculado a influência de cada carregamento nas extremidades, e nas demais secções da viga, uma vez que ao final será utilizado esse resultado para sobreposição dos efeitos de todas ações. Para o cálculo de viga infinita:

**Com carga pontual aplicada:
É necessário considerar a origem, x=0, no ponto de aplicação da carga, portanto será utilizado um x global (xg), e um x local (x) para cada seção da viga, para cada carga aplicada.
As funções abaixo são aplicadas somente para x positivo. Para o x negativo, é necessário, uma análise das funções auxiliares, apresentadas na primiera coluna abaixo. Analisando as funções auxiliares, conclui-se que os diagramas de deslocamento (y) e de momento fletor (M) possuem simetria em relação ao eixo y, portanto os valores dos pontos são iguais tanto para "x" negativo quanto para "x" positivo. Já o diagrama de esforço cortante (V) é antissimétrico em relação ao eixo y, ou seja, os valores dos pontos com "x" negativo possuem sinais contrários aos dos pontos "x" positivos.

P
x
y

$\varphi = e^{-\beta x} * (\cos(\beta x) + \operatorname{sen}(\beta x))$ $\quad y = \frac{P*\beta}{2*K} * \varphi(\beta x)$

$\psi = -e^{-\beta x} * (\operatorname{sen}(\beta x) - \cos(\beta x))$ $\quad M = \frac{P}{4*\beta} * \psi(\beta x)$

$\theta = e^{-\beta x} * \cos(\beta x)$ $\quad V = \frac{-P}{2} * \theta(\beta x)$

Carga Pontual:
P[0]= 10.000 kN

| x global | x | φ(βx) | ψ(βx) | θ(βx) | y(mm) | M(kN*m) | V(kN) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | -10.000 | -0.043 | -0.042 | -0.043 | -0.002 | -0.335 | -0.214 |
| 0.400 | -9.600 | -0.043 | -0.054 | -0.048 | -0.002 | -0.426 | -0.241 |
| 0.800 | -9.200 | -0.040 | -0.067 | -0.053 | -0.002 | -0.528 | -0.267 |
| 1.200 | -8.800 | -0.036 | -0.081 | -0.058 | -0.001 | -0.640 | -0.291 |
| 1.600 | -8.400 | -0.029 | -0.096 | -0.062 | -0.001 | -0.761 | -0.312 |
| 2.000 | -8.000 | -0.019 | -0.112 | -0.065 | -0.001 | -0.889 | -0.327 |
| 2.400 | -7.600 | -0.005 | -0.129 | -0.067 | -0.000 | -1.021 | -0.335 |
| 2.800 | -7.200 | 0.013 | -0.146 | -0.066 | 0.000 | -1.155 | -0.332 |
| 3.200 | -6.800 | 0.035 | -0.162 | -0.064 | 0.001 | -1.285 | -0.318 |
| 3.600 | -6.400 | 0.063 | -0.177 | -0.057 | 0.002 | -1.407 | -0.287 |
| 4.000 | -6.000 | 0.096 | -0.191 | -0.048 | 0.004 | -1.513 | -0.238 |
| 4.400 | -5.600 | 0.135 | -0.201 | -0.033 | 0.005 | -1.594 | -0.165 |
| 4.800 | -5.200 | 0.180 | -0.207 | -0.013 | 0.007 | -1.641 | -0.066 |
| 5.200 | -4.800 | 0.233 | -0.207 | 0.013 | 0.009 | -1.643 | 0.064 |
| 5.600 | -4.400 | 0.291 | -0.200 | 0.046 | 0.011 | -1.586 | 0.228 |
| 6.000 | -4.000 | 0.356 | -0.183 | 0.086 | 0.014 | -1.455 | 0.432 |
| 6.400 | -3.600 | 0.427 | -0.156 | 0.136 | 0.017 | -1.234 | 0.679 |
| 6.800 | -3.200 | 0.503 | -0.114 | 0.194 | 0.020 | -0.906 | 0.972 |
| 7.200 | -2.800 | 0.582 | -0.057 | 0.263 | 0.023 | -0.450 | 1.314 |
| 7.600 | -2.400 | 0.663 | 0.019 | 0.341 | 0.026 | 0.152 | 1.706 |
| 8.000 | -2.000 | 0.744 | 0.116 | 0.430 | 0.029 | 0.922 | 2.150 |
| 8.400 | -1.600 | 0.821 | 0.237 | 0.529 | 0.032 | 1.879 | 2.644 |
| 8.800 | -1.200 | 0.890 | 0.384 | 0.637 | 0.035 | 3.043 | 3.183 |
| 9.200 | -0.800 | 0.946 | 0.559 | 0.753 | 0.037 | 4.430 | 3.763 |
| 9.600 | -0.400 | 0.985 | 0.764 | 0.875 | 0.039 | 6.057 | 4.373 |
| 10.000 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.039 | 7.931 | 5.000 |
| 10.000 | 0.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.039 | 7.931 | -5.000 |
| 10.400 | 0.400 | 0.985 | 0.764 | 0.875 | 0.039 | 6.057 | -4.373 |
| 10.800 | 0.800 | 0.946 | 0.559 | 0.753 | 0.037 | 4.430 | -3.763 |
| 11.200 | 1.200 | 0.890 | 0.384 | 0.637 | 0.035 | 3.043 | -3.183 |
| 11.600 | 1.600 | 0.821 | 0.237 | 0.529 | 0.032 | 1.879 | -2.644 |
| 12.000 | 2.000 | 0.744 | 0.116 | 0.430 | 0.029 | 0.922 | -2.150 |
| 12.400 | 2.400 | 0.663 | 0.019 | 0.341 | 0.026 | 0.152 | -1.706 |
| 12.800 | 2.800 | 0.582 | -0.057 | 0.263 | 0.023 | -0.450 | -1.314 |
| 13.200 | 3.200 | 0.503 | -0.114 | 0.194 | 0.020 | -0.906 | -0.972 |
| 13.600 | 3.600 | 0.427 | -0.156 | 0.136 | 0.017 | -1.234 | -0.679 |
| 14.000 | 4.000 | 0.356 | -0.183 | 0.086 | 0.014 | -1.455 | -0.432 |
| 14.400 | 4.400 | 0.291 | -0.200 | 0.046 | 0.011 | -1.586 | -0.228 |
| 14.800 | 4.800 | 0.233 | -0.207 | 0.013 | 0.009 | -1.643 | -0.064 |
| 15.200 | 5.200 | 0.180 | -0.207 | -0.013 | 0.007 | -1.641 | 0.066 |
| 15.600 | 5.600 | 0.135 | -0.201 | -0.033 | 0.005 | -1.594 | 0.165 |
| 16.000 | 6.000 | 0.096 | -0.191 | -0.048 | 0.004 | -1.513 | 0.238 |
| 16.400 | 6.400 | 0.063 | -0.177 | -0.057 | 0.002 | -1.407 | 0.287 |
| 16.800 | 6.800 | 0.035 | -0.162 | -0.064 | 0.001 | -1.285 | 0.318 |
| 17.200 | 7.200 | 0.013 | -0.146 | -0.066 | 0.000 | -1.155 | 0.332 |
| 17.600 | 7.600 | -0.005 | -0.129 | -0.067 | -0.000 | -1.021 | 0.335 |
| 18.000 | 8.000 | -0.019 | -0.112 | -0.065 | -0.001 | -0.889 | 0.327 |
| 18.400 | 8.400 | -0.029 | -0.096 | -0.062 | -0.001 | -0.761 | 0.312 |
| 18.800 | 8.800 | -0.036 | -0.081 | -0.058 | -0.001 | -0.640 | 0.291 |
| 19.200 | 9.200 | -0.040 | -0.067 | -0.053 | -0.002 | -0.528 | 0.267 |
| 19.600 | 9.600 | -0.043 | -0.054 | -0.048 | -0.002 | -0.426 | 0.241 |
| 20.000 | 10.000 | -0.043 | -0.042 | -0.043 | -0.002 | -0.335 | 0.214 |

**Classificação da Viga:**

Viga Infinita

Figura 3: Parte do relatório PDF gerado.

## CONCLUSÕES

Depois de mais de um ano de estudo e avaliações de usuários do programa, pode-se concluir que o trabalho tem mostrado resultados significativos, principalmente entre os alunos, que buscam facilitar o estudo dos conteúdos de sala de aula. Muitos usuários dizem que os relatórios PDF detalhando os passos da resolução ajudam no entendimento de exercícios propostos em sala e na hora de estudar para provas. Cabe ressaltar que este projeto faz parte de um grupo de pesquisa do CNPq e possui outras páginas com programas na área de Análise de Estruturas, Cálculo Numérico, Construção Civil e Dimensionamento de Estruturas de Concreto.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia pela bolsa recebida no ano de 2017, por meio do programa PIBIFSP.

## REFERÊNCIAS

FTOOL. Ftool para Windows, versão 4.00. PUC-Rio, 2017. Disponível em <https://www.alis-sol.com.br/Ftool/ >. Acesso em 29 de junho de 2017.

SUSSEKIND, J.C. **Curso de Análise Estrutural – Deformações em estruturas e Método das forças.** 4° Edição. Porto Alegre. Globo, 1980. 310 páginas.

PDFMAKE. MIT, 2017. Disponível em <http://pdfmake.org/#/>. Acesso em 29 de junho de 2017.